Ainsi $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^y = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \text{Log}\left[\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]$

Conclusion : $\forall x > 0; f^{-1}(x) = \text{Log}\left[\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]$.

4/a- $\forall x \in \text{IR};\ e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = f(x)$.

b- Désignons par $\mathscr{D}'_\lambda$ la partie du plan limitée par : $(\mathscr{C}')$ et les droites $\left(O,\vec{j}\right)$: $x = 0$; $\left(O,\vec{i}\right)$: $y = 0$ et D'_λ : $y = \lambda$.

Désignons par $\mathscr{D}_\lambda$ la partie du plan limitée par : $(\mathscr{C})$ et les droites $\left(O,\vec{i}\right)$: $y = 0$, $\left(O,\vec{j}\right)$: $x = 0$; et D_λ : $x = \lambda$.

Comme $(\mathscr{C}') = S_\Delta((\mathscr{C}))$, $S_\Delta(D_\lambda) = D'_\lambda$, $S_\Delta\left(\left(O,\vec{i}\right)\right) = \left(O,\vec{j}\right)$ alors $\mathscr{D}'_\lambda = S_\Delta(\mathscr{D}_\lambda)$

et comme de plus S_Δ est une isométrie alors $\mathscr{D}'_\lambda$ et $\mathscr{D}_\lambda$ ont le même aire

$\text{Air}(\mathscr{D}_\lambda) = \text{Air}(\mathscr{D}'_\lambda)$

$\Rightarrow \mathscr{A}(\lambda) = \int_\lambda^0 f(x)dx = \int_\lambda^0 \left(e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}\right)dx$ **car** $f(x) > 0; \forall x \in \text{IR}$

$= \left[e^x - \text{Log}(1+e^x)\right]_\lambda^0 = 1 - \text{Log}(2) - e^\lambda + \text{Log}(1+e^\lambda)$.

B-

1/a- $F_1(x) = \int_x^0 \dfrac{e^t}{1+e^t}dt = \left[\text{Log}(1+e^t)\right]_x^0 = \text{Log}2 - \text{Log}(1+e^x)$.

· $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [\text{Log}(2) - \text{Log}(1+e^x)] = \text{Log}2$ **car** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

b- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}dt$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \mathscr{A}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [1 - \text{Log}2 - e^x + \text{Log}(1+e^x)]$

$= 1 - \text{Log}2$. **car** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

2/a- $\forall n \in \text{IN}^*$ et $\forall x \in \text{IR}^-$ on a :

$F_{n+1}(x) + F_n(x) = \int_x^0 \dfrac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}dt + \int_x^0 \dfrac{e^{nt}}{1+e^t}dt$

$= \int_x^0 \dfrac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t}dt = \int_x^0 e^{nt}dt = \left[\dfrac{1}{n}e^{nt}\right]_x^0$

$= \dfrac{1-e^{nx}}{n}$.

b- Montrons par récurrence que $\forall n \in \text{IN}^*$, $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)\right)$ existe et fini.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \text{Log}2$ $\Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 1$.